Matematyka
Lista 2

Definicja. Jeżeli między dwoma zachodzi wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie, to zbiory takie nazywamy *równolicznymi* lub *równej mocy.* Innymi słowy, zbiory A i B nazywamy *równolicznymi* (lub *równej mocy*) jeśli istnieje bijekcja $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$.
Moc zbioru A będziemy oznaczamy symbolem $\overline{\overline{A}}$. Z definicji zbiory A i B są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. Moc zbioru liczb naturalnych oznacza sie $\aleph_0$ (alef zero), natomiast moc zbioru liczb rzeczywistych symbolem $\mathfrak{c}$. Czyli

$$\overline{\overline{\mathbf{N}}} = \aleph_0, \qquad \overline{\overline{\mathbf{R}}} = \mathfrak{c}.$$

Stwierdzenie. Jeżeli zbiór A jest skończony, to zbiór B jest równoliczny z A wtedy i tylko wtedy, gdy B ma tyle samo elementów co A.

Stwierdzenie. Jeśli zbiór A jest nieskończony i zbiór B jest skończony, to zbiory A i $A \cup B$ są równoliczne, tzn. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup B}}$.

Definicja. Zbiór nazywamy *przeliczalnym*, gdy jest zbiorem skończonym, lub gdy jest zbiorem mocy $\aleph_0$.

Stwierdzenie. Następujące warunki sa równoważne

1) X jest zbiorem przeliczalnym,
2) istnieje suriekcja $f : \mathbf{N} \to X$,
3) elementy zbioru X można ustawić w ciąg $a_1, a_2, a_3, ...$ (skończony lub nieskończony)

Zad 1. Wykazać, że następujące zbiory są równoliczne

a) $A = \{x \in \mathbf{N} : x \leq 8\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : 1 < x^2 < 85\}$,
b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 1 < 0\}$, $B = \emptyset$
c) $A = \{x \in \mathbf{C} : x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

Zad 2. Sprawdzić, czy zbiory A, B są równej mocy

a) $A = \{x \in \mathbf{N} : 2 < x < 10\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 - 4 = 0 \ \vee \ 2 \leq x^2 \leq 64\}$,
b) $A = \{x \in \mathbf{N} : x^2 + 3x + 2 = 0\}$, $B = x \in \mathbf{R} : x^2 + 1 = 0\}$,
c) $A = \{x \in \mathbf{W} : x^2 - \frac{9}{16} = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : |x| < 3\}$,
d) $A = \{x \in \mathbf{C} : x^2 - 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{C} : x^2 - 4 = 0\}$.

Zad 3. Wykazać, że następujące zbiory są przeliczalne

a) $\{x \in \mathbf{N} : \bigvee_{y \in \mathbf{R}} \ x = \sin y\}$,
b) $\{x \in \mathbf{N} : \bigvee_{y \in \mathbf{R}} \ x = \operatorname{tg} y\}$,
c) zbiór liczb parzystych dodatnich
d) zbiór liczb całkowitych

Zad 4. Wykazać, że

a) zbiory $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $(-\infty, +\infty)$ są tej samej mocy,

b) dowolne przedziały (a, b) i (c, d) są równoliczne.

Wyciągnąć stąd wniosek, że wszystkie przedziały są mocy continuum.

Zad 5. Udowodnić, że zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym. Wyciągnąć stąd wniosek, że zbiór liczb wymiernych jest mocy $\aleph_0$.

Zad 6. Dowieść, że jeżeli A, B są zbiorami przeliczalnymi, to zbiór $A \times B$ jest też przeliczalny.

Definicja. *Ciągiem nieskończonym* o wyrazach w zbiorze Y nazywamy odwzorowanie $a : \mathbf{N} \to Y$. Jeśli założymy dodatkowo, że $Y = \mathbf{R}$, to odwzorowanie $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ będziemy nazywać *ciągiem liczbowym.*

Wartość $a(n)$ będziemy oznaczać symbolem a_n i nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Ciąg a_1, a_2, $a_3, \ldots$ zapisujemy również w postaci $\{a_n\}$.

Zad 7. Wypisać kilka pierwszych wyrazów ciągu

$$\text{a)}\quad a_n = 2, \qquad \text{b)}\quad a_n = (-1)^{n+1}\frac{3}{n+1}, \qquad \text{c)}\quad a_n = n^{(-1)^n},$$

$$\text{d)}\quad a_n = 2 - n[2 + (-1)^n], \qquad \text{e)}\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}, \qquad \text{f)}\quad a_n = \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$g)\quad a_1 = 1,\ a_2 = 1 \ \text{ i } \bigwedge_{n>2} a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Zad 8. Znaleźć wzór ogólny następującego ciągu

a) $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{6}, \frac{81}{8}, \frac{243}{10}, \ldots$

b) $\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, -\frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \ldots$

c) $0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{1}{729}, \ldots$

d) $1, -4, 9, -16, 0, 25, \ldots$

e) $\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{5}{4}}, \sqrt{\frac{6}{5}}, \ldots$

Definicja. Liczbę g nazywamy *granicą ciągu* $\{a_n\}$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba N taka, że dla każdego $n > N$ spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Piszemy przy tym $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ lub też $a_n \longrightarrow g$, przy $n \to \infty$.
Równoważnie definicję granicy ciągu można zapisać w następującej postaci

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = g) \iff \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n>N} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Ciąg posiadający granicę nazywamy *zbieżnym*, natomiast ciąg, który granicy nie posiada nazywamy *rozbieżnym.*

Uwaga. Liczba g jest granicą ciągu $\{a_n\}$, jeżeli w dowolnym otoczeniu punktu g na osi liczbowej leżą wszystkie, z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości, wyrazy ciągu $\{a_n\}$.

Przykład. Ciąg $\{(-1)^n\}$ nie posiada granicy, ponieważ poza każdym przedziałem o długości mniejszej niż 2 leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$.

Definicja. Rozważa się również następujące określenia ciągów: rozbieżnego do $+\infty$ oraz rozbieżnego do $-\infty$

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty) \iff \bigwedge_M \bigvee_N \bigwedge_{n>N} a_n > M,$$

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty) \iff \bigwedge_M \bigvee_N \bigwedge_{n>N} a_n < M.$$

Przykład. $\lim_{n\to\infty}(2n^2+7n-5) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}(1-7n^3) = -\infty$.

Twierdzenie (ważne granice).

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2,71828...$ (*liczba Eulera*)

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, gdzie $a > 0$

3) $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \text{nie istnieje} & a \le -1 \\ 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$

Twierdzenie (własności granicy ciągu). Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to:

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, dla $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$.

Twierdzenie o trzech ciągach. Dane są trzy ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$. Jeżeli

$$\bigvee_N \bigwedge_{n>N} (a_n \le b_n \le c_n)$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g,$$

to istnieje granica ciągu $\{b_n\}$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Zad 9. Korzystając z definicji granicy ciągu udowodnić, że

$$a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad b)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \qquad c)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

$$d)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{n+1} = -1, \qquad e)\quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3^n}\right) = 1.$$

Zad 10. Wyznaczyć granicę ciągu

$$a)\quad a_n = \sqrt[n]{3} + \sqrt[n+1]{5}, \qquad b)\quad a_n = \sqrt[n]{100} + \sqrt[n]{0,001}, \qquad c)\quad a_n = \sqrt[n]{2} - \frac{n}{n+1},$$

$$d)\quad a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}, \qquad e)\quad a_n = \frac{\sqrt[n]{5}(n^2+2)}{n^2}.$$

Zad 11. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a)\quad a_n = \frac{(1-2n)^3}{(2n+3)^2(1-7n)}, \qquad b)\quad a_n = \frac{2+\sqrt{n}}{1-2n},$$

$$c)\quad a_n = \frac{1-2n}{2+\sqrt{n}}, \qquad d)\quad a_n = \frac{(3-\sqrt{n})^2}{5+4n},$$

$$e)\quad a_n = \sqrt[3]{\frac{2n+10}{7-16n}}, \qquad f)\quad a_n = \frac{1+2+3+...+n}{(3n-1)^2},$$

$$g)\quad a_n = \sqrt[n]{10^n+6^n}, \qquad h)\quad a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n,$$

$$i)\quad a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n, \qquad j)\quad a_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n},$$

$$k)\quad a_n = \frac{1-7\cdot 3^{2n}}{4\cdot 9^n+7}, \qquad l)\quad a_n = \frac{3\cdot 2^{2n+1}-8}{4^{n-1}+3}.$$

Zad 12. Kapitał $k = 1000\,\mathrm{PLN}$ podlega oprocentowaniu $p = 6\%$ rocznie w ciągu czasu $t = 3$ lata. Obliczyć kapitał końcowy, gdy

a) odsetki są dopisywane do kapitału w końcu każdego roku,

b) odsetki są dopisywane do kapitału m razy w roku co $\frac{1}{m}$ roku (obliczyć dla $m = 12$),

c) odsetki są dopisywane do kapitału w sposób ciągły, tzn. gdy $m \to \infty$.